外国為替の取引間隔のミクロモデルからの導出

佐藤彰洋
京都大学大学院情報学研究科
E-mail:aki@amp.i.kyoto-u.ac.jp

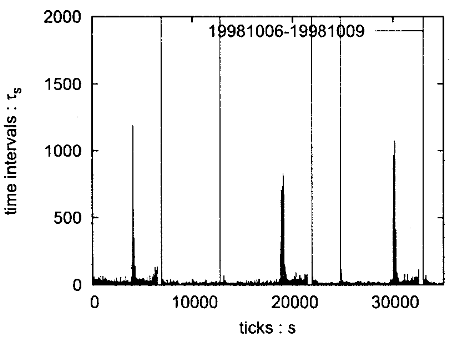
本稿では市場価格変動における取引時間間隔に着目して議論する．先ず，実際の取引時間間隔の累積分布関数がべき則に従うことを紹介する．次に微視的な視点から売買の素過程を考慮した，ディーラーモデルについて説明する．そして，このモデルから，取引時間間隔に対する発展方程式を導出し，取引時間間隔がランダム乗算過程によって記述できることを示す．このことから，取引時間間隔の累積分布関数がべき則に従うことに説明を与える．

キーワード:ディーラーモデル，取引時間間隔，ランダム乗算過程

1　はじめに

経済時系列，例えば為替や株価の市場価格は時々刻々ゆらいでいる．この価格変動のゆらぎ (マクロスコピックな現象) は，沢山の人が関わる市場における売買の素過程 (ミクロスコピックな過程) から生じていることは明らかである．しかし，売買の素過程から価格変動のゆらぎが生じるメカニズムについては，実はまだよく理解されていない．本稿では統計物理学のアナロジーからマクロスコピックな現象とミクロスコピックな過程とを橋渡しすることによって，なぜ取引時間間隔がゆらぐのかについて議論する．

2　取引時間間隔の性質



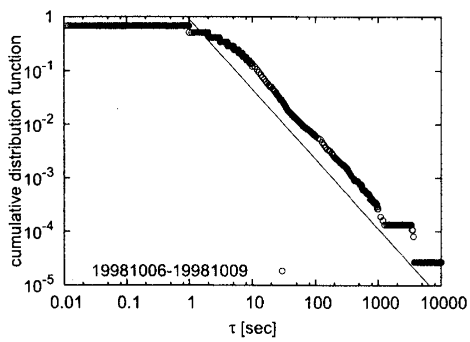


図 1: 1998 年 10 月 6 日から 1998 年 10 月 9 日までの円/ドルレートのティックデータから得た取引時間間隔 (左). 1998 年 10 月 6 日から 1998 年 10 月 9 日までの円/ドルレートのティックデータから得た取引時間間隔の累積分布関数. 実線は傾き 1.3 を持つべき分布.

ティックデータが利用できるようになるにつれて，取引時間間隔の研究が活発になってきている [1]．本稿では，円/ドルレートの変動を例に取り取引時間間隔がどのような統計的性質を持つかを紹介する．取引時間間隔に着目するため，s 番目の取引時刻を t_s で表し，取引時間間隔を $\tau_s \equiv t_s - t_{s-1}$ で定義する．同じ期間の取引時間間隔 τ_s の時系列を図. 1(左) に，その累積分布関数を図. 1(右) に示す．累積分布関数は τ の確率密度関数 $f(\tau)$ とすると，次式で定義される．

$$F(\geq \tau) = \int_{\tau}^{\infty} f(\tau')d\tau' \tag{1}$$

時間間隔の時系列はしばしば大きな変動を示し，累積分布は log-log プロットは約 3 桁について直線的となっている．このことは累積分布関数が

$$F(\geq \tau) \propto \tau^{-\kappa} \tag{2}$$

の形をしていることを意味する. このような関係が成り立つことをべき則に従うと言う. そして,このべき指数は $\kappa = 1.3$ である.

3 ディーラーモデル

ディーラーモデル [2] とは売買の素過程を単純化したミクロモデルであり, 高安, 三浦, 平林, 浜田らによって 1992 年に提唱されたのが始まりである [3].

先ず単純化のために 2 者間での取引を考える. 一方が売り手, もう一方が買い手とする. 売り手の提示価格を S, 買い手の提示価格を B とする. $S \leq B$ が成り立つ時取引が成立する. もし, 売り手も買い手もこの取引を実現させたいと考えるならば, $S > B$ であれば売り手は提示価格を下げ, 買い手は提示価格を上げなければならない. ステップ t での売り手の提示価格を $S(t)$, 買い手の提示価格を $B(t)$ とし, これを式で表わすと,

$$\begin{cases} S(t+1) &= S(t) - \gamma_S(t) \\ B(t+1) &= B(t) + \gamma_B(t) \end{cases}, \tag{3}$$

と書くことができる. ここで $\gamma_S(t)$, $\gamma_B(t)$ はそれぞれ売り手, 買い手の提示価格の更新量であり非負値を取る. そして, 売り手と買い手は $S(t) \leq B(t)$ を満足するまで (3) 式に従い, 各々提示価格を更新していく.

これを N 人のディーラーがいる市場に拡張する. ステップ t でのディーラー $i (i = 1, 2, \ldots)$ の提示価格を $p_i(t)$ とする. そうすると, 2 者間の取引の議論より, ディーラー i の提示価格の発展方程式は次式で書くことができる.

$$p_i(t+1) = p_i(t) + D_i(t)\gamma_i(t). \tag{4}$$

ここで, $D_i(t) = -1$ のとき i は売り手, $D_i(t) = 1$ のとき i は買い手とする. $\gamma_i(t)$ はステップ t におけるディーラー i の更新量である. そして市場価格を決定するために全てのディーラーが市場にこの売値/買値 $p_i(t)$ を提示し, 売り手と買い手は個別に価格競争をすると仮定する. すなわち, 取引の成立する条件は

$$\min_{D_i(t)=-1} \{p(t)\} \leq \max_{D_i(t)=1} \{p(t)\}, \tag{5}$$

となる. ここで, $\min_{D_i(t)=-1} \{p(t)\}$ は最小の売り提示価格, $\max_{D_i(t)=1} \{p(t)\}$ は最大の買い提示価格を意味する. また市場価格 $P(t)$ は提示価格の中間値

$$P(t) = \Big(\min_{D_i(t)=-1} \{p(t)\} + \max_{D_i(t)=1} \{p(t)\} \Big), \tag{6}$$

で決まると仮定する. また取引がない場合は寸前の取引価格が保持されているとする.

ディーラー i の更新量 $\gamma_i(t)$ の決め方には様々な決め方がある. $\gamma_i(t)$ はディーラーの個性を反映し, 過去の価格変化から次の価格を予想して決定される. よって, 一般には過去の全ての時刻での市場価格に基いて決定されていると考えられる.

$$\gamma_i(t) = \gamma_i(P(t-1), P(t-2), \ldots,). \tag{7}$$

しかしながら, ここでは単純化のため,$\gamma_i(t)$ は寸前の価格差と寸前の取引時間間隔にのみに依存すると仮定する. この仮定は大きな変動が起ったときにディーラーは活発の取引に参加することと, 取引が活発に起っている場合には活発に取引に参加することを単純化したモデルになっている.

$$\gamma_i(t) = \frac{|1 + c_i \Delta P_{prev}| a_i}{\tau_{prev}}. \tag{8}$$

ここで, c_i, a_i は i 番目のディーラーの戦略を決める定数である. c_i は $[-c^*, c^*]$ の一様乱数, a_i は $(0, a^*)$ の一様乱数で与える. また, ΔP_{prev} は寸前の取引で生じた価格差,τ_{prev} は寸前の取引時間間隔である.

商品を売った (買った) ディーラーは, 買い (売り) ディーラーとなるものとする. これは取引に参加した後,$D_i(t+1) = -D_i(t)$ によって符号を反転させることに対応する. そして, 新たに始める提示価格は市場価格から Λ だけ外れた値とする. すなわち,

$$B_i(t+1) = P(t) - D_i(t+1)\Lambda, \tag{9}$$

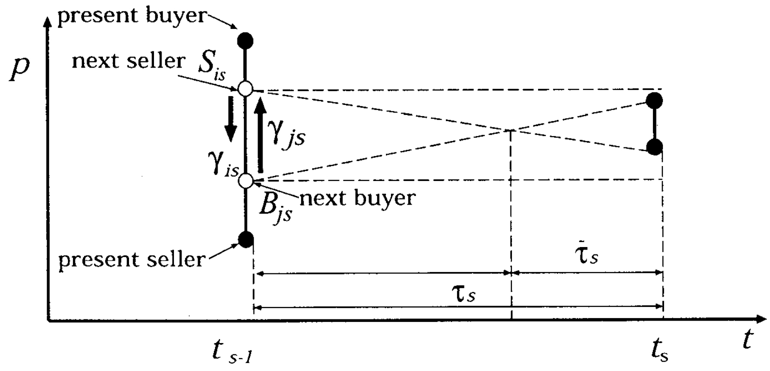


図 2: t_{s-1} から t_s までの間の提示価格の推移. S_{i_s} と B_{j_s} はそれぞれ t_s で売り手と買い手になるディーラーの t_{s-1} での提示価格. τ_s は t_s と t_{s-1} との差. $\tilde{\tau}_s$ は計算上の交差点と実際の取引間隔とのずれ.

である. ディーラーは過去の市場価格から次のステップでの市場価格を予測し, 次のステップでの提示価格を決定する. ディーラーが提示した売値/買値から次のステップでの市場価格が決定される. このことを繰り返すことによって市場価格は逐次的に決まっていく.

4　ミクロからマクロへ

この節では 3 節で導入したディーラーモデルの市場価格差と時間間隔に対して, それぞれ確率過程が近似的に導出可能であることを示す. この近似の本質的なアイデアは, 本来は決定論的に決まるミクロスコピックな変数を, 確率変数と見なすことにある.

ステップ t_{s-1} から t_s までのディーラーの値の動きを, 図. 2 に示す. ここで, $s-1$ 回目での取引時に次の取引に参加することになるディーラーの売提示値と買提示値をそれぞれ, S_{i_s},B_{j_s} とする. 単位ステップ当り, 売り手は γ_{i_s}, 買い手は γ_{j_s} だけ提示価格を変化させる.

$$\begin{cases} p_{i_s} &= S_{i_s} - \gamma_{i_s} t \\ p_{j_s} &= B_{j_s} + \gamma_{j_s} t \end{cases} . \tag{10}$$

ここで, $\gamma_{i_s} = \frac{|1+c_{i_s}\Delta p_{s-1}|a_{i_s}}{\tau_{s-1}}$, $\gamma_{j_s} = \frac{|1+c_{j_s}\Delta p_{s-1}|a_{j_s}}{\tau_{s-1}}$ と置いた. 理想的には (10) 式と (10) 式の交点までの時間が取引時間間隔となる.

$$t = \frac{S_{i_s} - B_{i_s}}{\gamma_{i_s} + \gamma_{j_s}} \tag{11}$$

しかしながら, 実際の取引はこの理想的時間間隔より大きな時間で行われる. そのため τ_s は t より $\tilde{\tau}_s \geq 0$ だけずれる.

$$\tau_s = \frac{S_{i_s} - B_{j_s}}{\gamma_{i_s} + \gamma_{j_s}} + \tilde{\tau}_s \tag{12}$$

すなわち,

$$\tau_s = \frac{S_{i_s} - B_{j_s}}{|1 + c_{i_s}\Delta p_{s-1}|a_{i_s} + |1 + c_{j_s}\Delta p_{s-1}|a_{j_s}} \tau_{s-1} + \tilde{\tau}_s \tag{13}$$

である. ここで, $\mu_s = \frac{S_{i_s} - B_{j_s}}{|1+c_{i_s}\Delta p_{s-1}|a_{i_s} + |1+c_{j_s}\Delta p_{s-1}|a_{j_s}}$ と置くと,

$$\tau_s = \mu_s \tau_{s-1} + \tilde{\tau}_s \tag{14}$$

となる. この式は乗算的に働くノイズ μ_s と加算的に働くノイズ $\tilde{\tau}_s$ を有しており, ランダム乗算過程と呼ばれる確率過程である. ランダム乗算過程からべき則に従う変動が生み出だされることは実は古くからよく知られた事実である. ランダム乗算過程については, 多くの研究があるので, 詳しくは参考文献を参照されたい [4, 5, 6, 7].

5 おわりに

本稿で示したことは以下の通りである.

- 円/ドルレートのティックデータより, 取引時間間隔の累積分布関数が裾野の広いべき分布で近似できることを紹介した.
- ディーラーモデルの取引時間間隔に対してランダム乗算過程を導出し, 累積分布関数がべき則の従うメカニズムを明らかにした.

取引時間間隔の累積分布関数が裾野の広いべき分布によってよく近似できるのは, 過去の取引間隔を参照してディーラーが取引に参加するタイミングを変えることに起因している. その結果, 取引時間間隔はランダム乗算過程のメカニズムを有し, 取引時間間隔のべき的な振舞いを生み出だしている.

ミクロスコピックな売買の素過程のモデルから, 取引時間間隔がマクロスコピックな確率過程により近似できることの一例を示した. これによって, 他のミクロスコピックモデルにおいても確率過程による近似を通じたミクロとマクロの橋渡しが実現可能であると考える. 今後経済, 社会現象におけるミクロとマクロの橋渡し (ミクロマクロリンク) に関する活発な研究がなされることを期待して止まない.

謝辞

本稿中で示した円/ドルレートのデータを提供してくださった日本銀行の清水季子氏, 丸茂幸平氏に深く感謝します. また, 本研究を進めるに当り議論を深めて頂いた, ソニーコンピュータサイエンス研究所高安秀樹氏, はこだて未来大学高安美佐子助教授, 京都大学宗像豊哲教授に深く感謝します.

参考文献

[1] M. Takayasu and H. Takayasu, "Self-modulation processes and resulting generic 1/f fluctuations", Physica A, Vol. 324 (2003) pp. 101–107.

[2] 佐藤 彰洋, 高安 秀樹, "ディーラーモデルから金融工学へ", 数理科学, No. 472, October (2002) pp. 27–32.

[3] H. Takayasu, H. Miura, T. Hirabayashi and K. Hamada, "Statistical properties of deterministic threshold elements - the case of market price", Physica A, Vol. 184 (1992) pp. 127–134.

[4] H. Kesten, "Random difference equations and renewal theory for products of random matrices", Acta Mathematica, Vol. 131 (1973) pp. 207–248.

[5] L. de Hann, H. Rootzén, C.G. de Vries, "Extremal behaviour of solutions to a stochastic difference equation with applications to ARCH processes", Stochastic processes and their applications, Vol. 32 (1989) pp. 213-224.

[6] H. Takayasu, A.-H. Sato and M. Takayasu, "Stable infinite variance fluctuations in randomly amplified Langevin systems", Physical Review Letters, Vol. 79, No. 6 (1997) pp. 966–969.

[7] A.-H. Sato, H. Takayasu and Y. Sawada, "Invariant power law distribution of Langevin systems with colored multiplicative noise", Physical Review E, Vol. 61, No. 2 (2000) pp. 1081–1087.